1.6 *Gebroken lineaire functies*

1.53 Twee zusjes schelen nagenoeg 5 jaar in leeftijd. Toen de oudste 10 werd zei ze trots tegen haar zusje: ‘Nu ben ik twee keer zo oud als jij.’ Vijf jaar later, toen de oudste opnieuw haar verjaardag vierde, herinnerde de jongste zich dit voorval plotseling en zei: ‘Nu ben je nog maar $1\frac{1}{2}$ keer zou oud als ik.(Naar een oud kinderraadsel.)

a Hoe groot is de verhouding van de leeftijden als de oudste 25 jaar wordt?

b Na hoeveel jaar is de oudste nog maar $1\frac{1}{10}$ keer zo oud als de jongste?

c Teken de grafiek van $f(x)=\dfrac{x+5}{x}$ voor $1 \le x \le 10$.

d Wat heeft het verhaal van de twee zusjes met het verloop van de grafiek te maken?

e Hoe zet de grafiek zich voort voor $x > 10$?

f Wat kun je zeggen van de verhouding van de leeftijden van beide zusjes als die het ‘eeuwige’ leven zouden hebben?

De functie $f(x)=\dfrac{x+5}{x}$ is een voorbeeld van een gebroken functie, waarbij teller en noemer elk lineaire functies zijn.
Daarom noemen we *f* een gebroken lineaire functie.
De algemene vorm van een gebroken lineaire functie is:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+c}$$

In bovenstaand voorbeeld geldt: $a=1$, $b=5$, $c=1$, $d=0$.
Verderop zal blijken dat *a*, *b*, *c* en *d* aan enige voorwaarden moeten voldoen, wil er sprake zijn van een ‘echte’ gebroken lineaire functie.

1.54 De meest eenvoudige gebroken lineaire functie *f* is die waarvoor geldt: $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=0$.

a Geef de formule van die functie *f.*

b Teken de grafiek van *f.*

c Welke asymptoten heeft die grafiek?

1.55 Bekijk de functies $f(x)=\dfrac{5}{x}$ en $g(x)=\dfrac{x+5}{x}$.

a Toon aan dat geldt: $g(x)=f(x)+1$

b Bereken $f'(x)$ en $g'(x)$

c Teken (voor $x \neq 0$) de grafieken van *f* en *g* in één assenstelsel.

1.56 Gegeven: $f(x)=\dfrac{3x+4}{2x}$.

a *f* is een gebroken lineaire functie. Welke waarden hebben *a,b, c* en *d*?

b Laat zien dat geldt: $f(x)=1\frac{1}{2}+\frac{2}{x}$ en teken vervolgens de grafiek van *f.*

c Welke asymptoten heeft die grafiek?

1.57 Gegeven zijn de functies $f(x)=\frac{6}{x}$ en $g(x)=\dfrac{6}{x-2}$.

a Welke lijnen zijn de asymptoten van *f*? en welke van *g*?

b Teken in één figuur de grafieken van *f* en *g*.

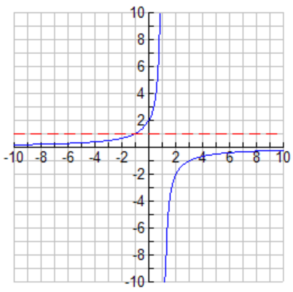
c Bereken $f'(x)$ en $g'(x)$.

1.58 Gegeven de volgende vier functies:

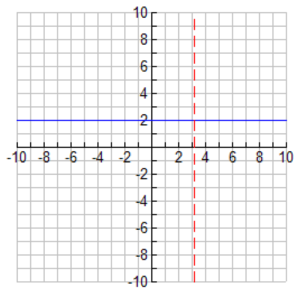
$$f(x)=\frac{-2}{x-1};\quad g(x)=\frac{x+2}{x+1};\quad h(x)=\frac{2x-6}{x-3};\qquad k(x)=\frac{x-2}{x}$$

Vier grafieken:

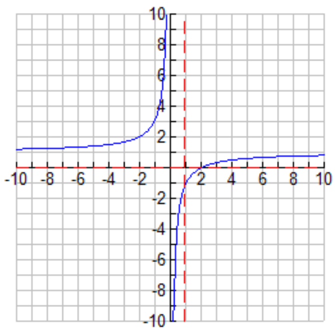
I



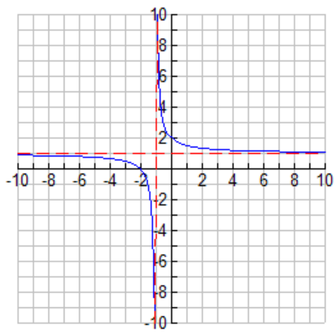
II



III



IV



De grafieken I, II, III en IV passen bij de functies *f, g, h* en *k*.

a Zoek uit welke grafiek bij welke functie hoort.

b Hoe kun je de verticale asymptoot in I, II, III en IV terugvinden in de formules?

De grafiek van een functie van de vorm:

$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ (waarbij $c\neq 0$ en $\dfrac{a}{b}\neq\dfrac{c}{d}$)

is een hyperbool; zo'n hyperbool heeft één horizontale asymptoot en één verticale asymptoot. De horizontale asymptoot kun je vinden door voor x heel grote waarden in te vullen (bijvoorbeeld $x=1$ miljard). De verticale asymptoot kun je vinden door na te gaan in de buurt van welke x de functiewaarde zeer groot wordt. Daar is het gedrag van de noemer van belang.

1.59 Gegeven de functie: $f(x)=\dfrac{15x+45}{3x-18}$.

a Verklaar: de verticale asymptoot is de lijn $x=6$

b Vul in: de horizontale asymptoot is de lijn $y=....$

c Teken de grafiek van *f*.

Als je in de functie van opgave 7 een heel groot getal voor x invult, bijvoorbeeld, dan hebben de constanten 45 en -18 nauwelijks invloed op de uitkomst:

$$\frac{15.000.000.000+45}{3.000.000.000-18}\approx\frac{15.000.000.000}{3.000.000.000}$$

Je ziet zo dat de uitkomst ongeveer gelijk moet zijn aan 5 $(=\frac{15}{3})$

In het algemeen geldt dat je de horizontale asymptoot van een gebroken lineaire functie kunt vinden als je de tellercoëfficiënt van x deelt door de noemercoëfficiënt van x. Waarschuwing: deze opmerking is dus alleen geldig voor functies van dat type.

1.60 In opgave 6 heb je gezien dan de grafiek van $f(x)=\dfrac{2x-6}{x-3}$ een horizontale lijn is met een 'gaatje'.

Verklaring: $\dfrac{2x-6}{x-3}=\dfrac{2(x-3)}{x-3}=2$ voor $x\neq 3$

$\dfrac{2x-6}{x-3}$ heeft geen betekenis voor $x=3$.

Bekijk nu de functie: $g(x)=2+\dfrac{1}{x-3}$.

a Verklaar: $g(x)=2+\dfrac{1}{x-3}$

b Hoe kun je uit de laatste formule de horizontale asymptoot van *g* vinden?

c Bereken de hellingscoëfficiënt van de grafiek van *g* in het punt $(1,1\frac{1}{2})$.

1.61 Noem de asymptoten en teken de grafiek van

a $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+1}$

c $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

b $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$

d $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x+1}$

1.62 Gegeven zijn de functies $t(x)=\dfrac{1}{2}x+2$ en $n(x)=\dfrac{1}{3}x+1$.

a Teken de grafieken van *t* en *n* in één figuur.

De functie *f* wordt gedefinieerd door: $f(x)=\dfrac{t(x)}{n(x)}$

b Bekijk het snijpunt T van de grafiek van t met de x-as. Wat levert punt T voor informatie over de grafiek van f?

c Bekijk het snijpunt N van de grafiek van n met de x-as. Wat levert punt N voor informatie over de grafiek van f?

d Hoe gedraagt $f(x)$ zich voor zeer grote waarden van s? En voor zeer kleine (zeer negatieve) waarden?

e Teken de grafiek van f.

1.7 *De Quotiëntregel*

In het voorgaande heb je regels geleerd voor het differentiëren van som, verschil, produkt en ketting van twee functies. Wat nog ontbreekt, is een regel voor het differentiëren van een quotiënt.

Stel $f(x)=\dfrac{t(x)}{n(x)}$

(t is 'tellerfunctie', n is 'noemerfunctie').

We bekijken eerst een voorbeeld: $t(x)=3x+4$ en $n(x)=2x-5$

In plaats van $f(x)=\dfrac{t(x)}{n(x)}$ kun je ook schrijven: $f(x)=t(x)\cdot n(x)^{-1}$

Dus: $f(x)=(3x+4)\cdot(2x-5)^{-1}$

Het differentiëren van f kun je nu uitvoeren door een combinatie van produkt- en kettingregel.

1.63 a Laat zien dat geldt: $f'(x)=\dfrac{3}{2x-5}-\dfrac{6x+8}{(2x-5)^2}$

b De formule van $f'(x)$ kan nog worden vereenvoudigd door de twee breuken onder de noemer $(2x-5)^2$ te brengen. Doe dit.

Je kunt bij het differentiëren van het quotiënt van twee functies altijd redden met produkt- en kettingregel. Er is echter ook een regel om de afgeleid van een quotiënt rechtstreeks te vinden: de quotiëntregel. Die regel luidt:

Als $f(x)=\dfrac{t(x)}{n(x)}$, dan $f'(x)=\dfrac{t'(x)\cdot n(x)-t(x)\cdot n'(x)}{(n(x))^2}$

Of korter:

$$\left(\frac{t}{n}\right)'=\frac{t'\cdot n-t\cdot n'}{n^2}$$

1.64 a. Neem $t(x)=3x+4$ en $n(x)=2x-5$ en bereken:

$$\frac{t'(x)\cdot n(x)-t(x)\cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

b Controleer of de uitkomst gelijk is aan de afgeleide van $f(x)=\dfrac{t(x)}{n(x)}$, zoals je die in opgave 1.64 hebt gevonden.

1.65 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

Laat zien dat uit de quotiëntregel volgt: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$

Je hebt de quotiëntregel al een paar keer toegepast, zonder dat aangetoond is dat de regel echt klopt. Er zijn verschillende methoden om de regel te bewijzen:

(1) Schrijf $\dfrac{t(x)}{n(x)}$ als $t(x)\cdot n(x)^{-1}$ en pas produkt- en kettingregel toe.

(2) Als $f(x)=\dfrac{t(x)}{n(x)}$ dan $f(x)\cdot n(x)=t(x)$

Dit links en rechts differentiëren geeft gelijke functies:

$f'(x)\cdot n(x)+f(x)\cdot n'(x)=t'(x)$ of korter: $f'n+fn'=t'$

Hiermee kan f' worden uitgedrukt in *t, n t'* en *n'*.

(3) Tenslotte kun je nagaan of $\left(\dfrac{t}{n}\right)'=\dfrac{t'n-tn'}{'n^2}$ klopt, door uit te gaan van:

$\dfrac{t}{n}\cdot n=1$.

Links en rechts differentiëren geeft:

$\left(\dfrac{t}{n}\right)'\cdot n+\dfrac{t}{n}\cdot n'=0$

Je kunt n controleren of $(\dfrac{t}{n})'$ inderdaad vervangen mag worden door $\dfrac{t'n-tn'}{n^2}$.

Bij het differentiëren met de quotiëntregel is de volgorde belangrijk: eerst de tellerfunctie differentiëren (en de noemer ongewijzigd laten), daarna andersom.

1.66 Differentieer de volgende functies:

a $f(x)=\dfrac{x^2+1}{3x+1}$

b $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$

c $f(x)=\dfrac{3x^2+x+1}{2x^2-x+1}$

d $f(x)=\dfrac{3x-4}{4x-5}$

e $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

f $f(x)=\dfrac{x^2+1}{4x}$

g $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$

h $f(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}$

1.67 $f(x)=\dfrac{3}{x^2-3}$ en $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2-3}$

Bereken $f'(x)$ en $g'(x)$

De functies *f* en *g* zijn verschillend maar hebben dezelfde afgeleide. Hoe kan dat?

1.68 $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ en $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

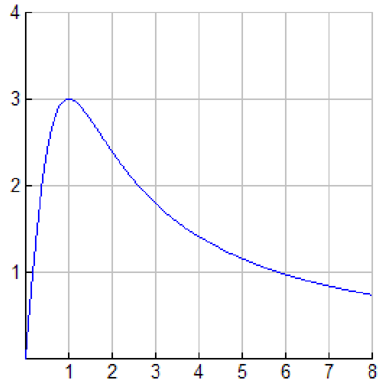
a. Stel een vergelijking op van de lijn die de grafiek van *f* raakt in het punt met *x*-coördinaat 0,

b Dezelfde vraag voor *g*.

c In welke intervallen is *f* stijgend en in welk dalend?

1.69 Hiernaast zie je de grafiek van

$$f(x)=\frac{6x}{x^2+1} \text{ voor } x\geq 0$$



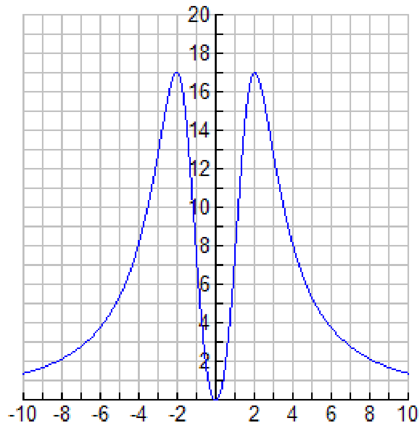
a Volgens de tekening is het maximum van *f(x)* gelijk aan 3. hoe kun je dat bewijzen met behulp van de afgeleide functie?

b Bereken *f''(x)*.

c Laat zien dat de grafiek een buigpunt heeft bij $x=\sqrt{3}$.

d Teken de grafiek van *f* in het gebied $x\leq 0$.

1.70 Gegeven is de functie $f(x)=\frac{136x^2}{x^2+16}$ voor $-10\leq x\leq 10$.



a Bereken de kleinste en de grootste functiewaarde.

b Los op: $f(x)\geq 8$.

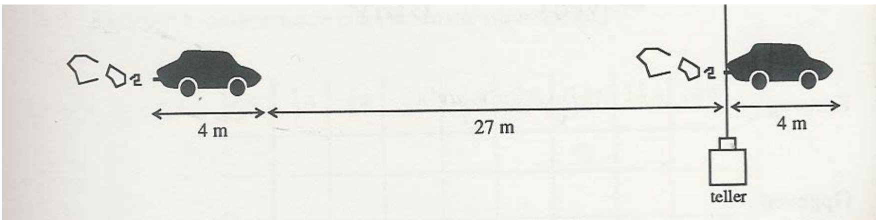
Een te groot verkeersaanbod op een te smalle weg … weer een file. Hoe drukker het is, des te langzamer de file rijdt. Blijkbaar kunnen bij lage snelheden meer auto's worden verwerkt. Toch gek, want bij een snelheid van 0 km/u stroomt geen enkele auto door. Is er een optimale snelheid van een file? Over dit probleem gaat de volgende opgave:

1.71 Belangrijk bij het fileprobleem is de onderlinge afstand van de auto's. Hoe groter de snelheid van de file, hoe groter de onderlinge afstand moet zijn,en dat is van invloed op de doorstroming. Anderzijds is de onderlinge afstand bij lage snelheid wel klein, maar in een slakkengangetje kan er ook niet veel doorstromen. De onderlinge afstand bepalen we met behulp van de vuistregel:

$r=0,0075v^2$ met *r* = remweg in meters en *v* = snelheid in km/u.

a Hoeveel meter afstand tot zijn voorligger zou een automobilist tenminste moeten aanhouden bij een snelheid van 60 km/u? En bij een twee keer zo grote snelheid?

b Stel je voor dat een file een snelheid van 60 km/u heeft en uit louter personenauto's bestaat. Neem voor het gemak aan dat elke auto 4 m lang is en dat iedere automobilist de voorgeschreven remafstand in acht neemt. Op een zeker punt heeft de politie een teller geplaatst. Laat zien dat er per minuut ongeveer 32 auto's de teller passeren.



a Hoe groot is het aantal auto's dat de teller passeert bij een snelheid van 120 km/u?

b Het aantal auto's (=N) dat de teller per minuut passeert is een functie van de snelheid v (in km/u). Toon aan dat geldt: $N = \dfrac{1000v}{0,45v^2 + 240}$

c Bereken $\dfrac{dN}{dv}$

d Toon aan dat de optimale snelheid van een file onder de hierboven geschetste voorwaarden ongeveer 23 km/u is.

1.7.1 Terugblik

Een gebroken lineaire functie is van de vorm:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

De grafiek van f is een hyperbool (tenzij $c = 0$ of $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$)

Zo'n hyperbool heeft twee asymptoten.

De horizontale asymptoot wordt gevonden door de verhouding van $ax+b$ en $cx+d$ te bekijken voor x wordt 'heel groot' (x 'nadert tot oneindig'). Die verhouding nadert tot $\dfrac{a}{c}$. De lijn $y = \dfrac{a}{c}$ is de horizontale asymptoot.

De verticale asymptoot wordt gevonden door te onderzoeken voor welke x de functiewaarden 'heel groot' worden ('tot oneindig naderen'). Dit gebeurt als de noemer van de gebroken vorm tot nul nadert. Uit $cx+d=0$ volgt $x = -\dfrac{d}{c}$ en dit is meteen de vergelijking van de verticale asymptoot.

Quotiëntregel

Laat u en v functies zijn van x.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Kortweg $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

1.7.2 Opgaven

a Bereken $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+3}{x+1}\right]$ en $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+x+4}{x+1}\right]$

b Gegeven: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0)$

Toon aan: $f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

c Wat kun je zeggen van $f'(x)$ in de vorige opgave in het geval $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

1.8 *Een bekende goniometrische functie*

1.72 Gegeven is de functie: $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

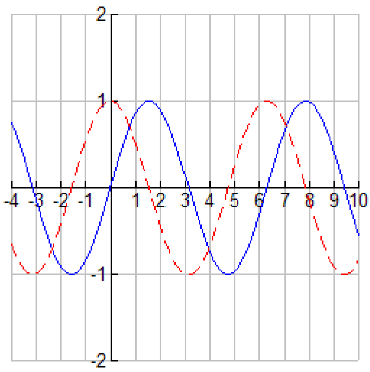
Omdat *f* samengesteld is uit de functies sinus en cosinus zie je hieronder de grafieken van die twee getekend.

a Welke informatie geven de oplossingen van de vergelijking $\sin x = 0$ over de grafiek van $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$?

b Dezelfde vraag maar nu voor de vergelijking: $\cos x = 0$

c Heeft de grafiek van *f* asymptoten?

d Vul in onderstaande tabel de exacte waarden:



x	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$1\frac{1}{6}\pi$	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{3}\pi$
$\sin x$									
$\cos x$									
$f(x)$									

e Bereken ook: $f\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$; $f\left(-\frac{1}{4}\pi\right)$; $f\left(-\frac{1}{5}\pi\right)$.

f Uit de antwoorden bij c en d kun je vermoeden dat de periode van $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ niet 2π is, maar verrassenderwijs π. Bestudeer bovenstaande figuur. Hoe kun je daaruit afleiden dat *f* inderdaad de periode π moet hebben?

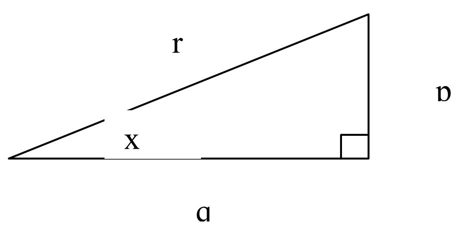
g Teken de grafiek van *f* voor het interval $-\frac{1}{2}\pi < x < 2\frac{1}{2}\pi$.

1.73 In een rechthoekige driehoek met een scherpe hoek van x radialen geldt:

$\sin x = \dfrac{p}{r}$

$\cos x = \dfrac{q}{r}$

$\tan x = \dfrac{p}{q}$



Bewijs dat hieruit volgt: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Het in opgave 1.74 genoemde verband tussen sinus, cosinus en tangens geldig is voor scherpe hoeken, maar kan ook worden gebruikt om de tangensfunctie voor alle andere x-waarden te definiëren

(met uitzondering van …, $-1\frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$, $2\frac{1}{2}\pi$).

Voor alle $x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$ ($k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$) geldt:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

In opgave 1.73 heb je al kennis gemaakt met de tangensfunctie en ontdekt dat tangens een kleinere periode heeft dan sinus en cosinus.

Tan(x) is een periodieke functie met periode π ofwel: $\tan(x + k\pi) = \tan x$ voor $k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$

1.74 $\tan x$ is niet gedefinieerd voor $x = \ldots, -1\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, \ldots$

a Waarom niet?

b Bereken enkele waarden van $\tan x$ voor x in de buurt van $\frac{1}{2}\pi$. Conclusie?

1.75 Je kunt $f(x) = \tan x$ differentiëren met behulp van de quotiëntregel.

a Controleer deze berekening:

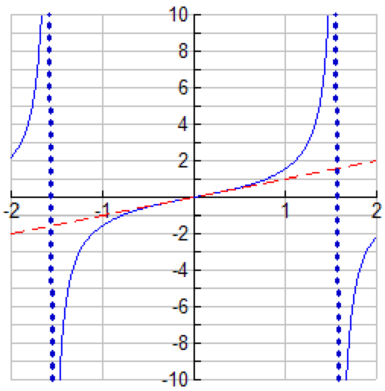
$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x$$

b Uit het resultaat van a volgt dat de grafiek van de tangens een buigpunt heeft in (0,0). Hoe?

c Welke vergelijking heeft de buigraaklijn in (0,0)?

d Welke andere buigpunten heeft de tangensgrafiek?

Hiernaast zie je de tangensgrafiek voor $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ met de buigraaklijn in (0,0). In de buurt van (0,0) valt de tangensgrafiek bijna samen met de lijn $y = x$. Er geldt: $x \approx x$ voor $x \approx 0$.



1.76 Bekijk de grafiek van $f(x) = \tan x$. Voor welke x geldt: $\tan x = 1$?

1.77 Gebruik het resultaat van opgave 1.76a en bereken:

a $\frac{d}{dx}[\tan 2x]$ c $\frac{d}{dx}[\frac{1}{\tan x}]$

b $\frac{d}{dx}[\tan^2 x]$ d $\frac{d}{dx}[\tan(1-x)]$

1.78 Welk interval bereikt:

a $1+\tan 2x$ als $-\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$?

b $1+\tan^2 x$ als $-\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$?

c $1+\tan^2 x - 2\tan x$ als $-\frac{1}{6}\pi < x < \frac{1}{4}\pi$?

1.8.1 Terugblik

In dit onderdeel heb je een nieuwe standaardfunctie leren kennen: de functie $f(x)=\tan(x)$.

Voor alle $x \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$ ($k = 0,1,-1,2,-2,...$) geldt:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

De functie tan is periodiek met periode π.

De grafiek van tan heeft (oneindig veel) verticale asymptoten; de vergelijkingen hiervan zijn: $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ ($k = 0,1,-1,2,-2,...$)

Voor het differentiëren van de tangensfunctie kun je gebruik maken van de regel:

$\frac{d}{dx}[\tan x] = 1+\tan^2 x$

1.8.2 Opgaven

a In welke punten tussen $x = -\frac{1}{2}\pi$ en $x = \frac{1}{2}\pi$ heeft de grafiek van $y = \tan x$ hellingscoëfficiënt 4?

b Welke periode heeft de functie $f(x) = \tan 2x$?
Teken de grafiek van $f(x)$ voor $0 \le x \le 2\pi$.

1.9 *Toepassingen*

1.79 De lengte *L* (in cm) van een metalen staaf is afhankelijk van de temperatuur *t* (in ^{0}C).

De zogenaamde uitzettingscoëfficiënt van de staaf bij *t* ^{0}c is gelijk aan $\dfrac{\frac{dL}{dt}}{L_0}$.

Hierbij is L0 de lengte van de staaf bij 00 C).

Er is nog gegeven: $L = L_0 \cdot (1 + at + bt^2)$ met $a = 2 \cdot 10^{-5}$ en $b = 3{,}5 \cdot 10^{-8}$.

Bereken de uitzettingscoëfficiënt van de staaf bij 50 0C.

1.80 Tussen de verkochte hoeveelheid *q* van een zeker artikel en de prijs *P* bestaat het volgende verband:

$P = 500 + \frac{1}{6}q - \frac{1}{3600}q^2$ (voor $q \geq 300$)

a Ga na dat volgend de formule geldt: *q* stijgt als *P* daalt.

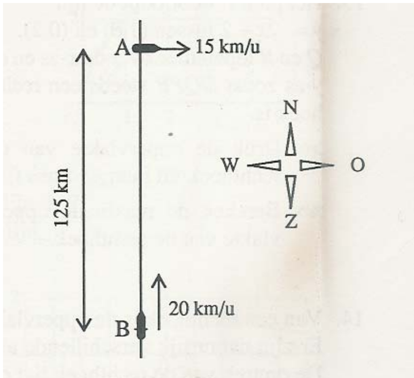
b De omzet *R* is gelijk aan $q \times P$. Bereken de prijs van het artikel waarvan de omzet maximaal is.

1.81 Om 24.00 uur vaart het schip de Bruinvis 125 km precies ten zuiden van het schip de Albatros. De bruinvis vaart in noordelijke richting met een snelheid van 20 km/u, de Albatros gaat oostwaarts met 15 km/u.

a Teken op schaal de posities van A en B om 02.00 uur en om 04.00 uur. Bereken ook de onderlinge afstand van beide schepen op die tijden.

b Druk de onderlinge afstand van A tot B, *t* uur na middernacht, uit in *t*.

c Bereken op welk tijdstip de afstand tussen de beide schepen minimaal is.



1.82 Een boot nadert de kust met een snelheid van 9m/sec. op een gegeven moment ($t = 0$) worden de motoren afgezet. De snelheid *t* seconden na het afzetten van de motor wordt gegeven door de formule: $v(t) = \left(3 - \frac{1}{2}t\right)^2$

a Leg uit dat de afgelegde afstand van de boot, na het afzetten van de motor gegeven wordt door de formule: $s(t) = 18 - \frac{2}{3}\left(3 - \frac{1}{2}t\right)^3$

b Hoeveel meter drijft de boot uit?

1.83 De lengte L (in cm) van een metalen staaf is afhankelijk van de temperatuur t (in ^{0}C).

De zogenaamde uitzettingscoëfficiënt van de staaf bij t ^{0}c is gelijk aan $\dfrac{\frac{dL}{dt}}{L_0}$

(hierbij is L_0 de lengte van de staaf bij 0^0 C).

Er is nog gegeven: $L = L_0 \cdot (1 + at + bt^2)$ met $a = 2 \cdot 10^{-5}$ en $b = 3{,}5 \cdot 10^{-8}$.

Bereken de uitzettingscoëfficiënt van de staaf bij 50 ^{0}C.

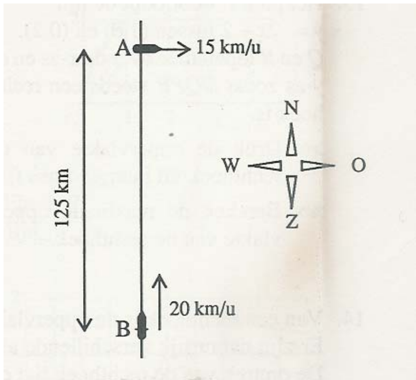
1.84 Tussen de verkochte hoeveelheid q van een zeker artikel en de prijs P bestaat het volgende verband:

$$P = 500 + \frac{1}{6}q - \frac{1}{3600}q^2 \text{ (voor } q \geq 300\text{)}$$

a. Ga na dat volgend de formule geldt: q stijgt als P daalt.

b. De omzet R is gelijk aan $q \times P$.
Bereken de prijs van het artikel waarvan de omzet maximaal is.

1.85 Om 24.00 uur vaart het schip de Bruinvis 125 km precies ten zuiden van het schip de Albatros. De bruinvis vaart in noordelijke richting met een snelheid van 20 km/u, de Albatros gaat oostwaarts met 15 km/u.



a Teken op schaal de posities van A en B om 02.00 uur en om 04.00 uur. Bereken ook de onderlinge afstand van beide schepen op die tijden.

b Druk de onderlinge afstand van A tot B, t uur na middernacht, uit in t.

c. Bereken op welk tijdstip de afstand tussen de beide schepen minimaal is.

1.86 Een boot nadert de kust met een snelheid van 9m/sec. op een gegeven moment ($t = 0$) worden de motoren afgezet. De snelheid t seconden na het afzetten van de motor wordt gegeven door de formule: $v(t) = \left(3 - \frac{1}{2}t\right)^2$

a Leg uit dat de afgelegde afstand van de boot, na het afzetten van de motor gegeven wordt door de formule: $s(t) = 18 - \frac{2}{3}\left(3 - \frac{1}{2}t\right)^3$

b Hoeveel meter drijft de boot uit?

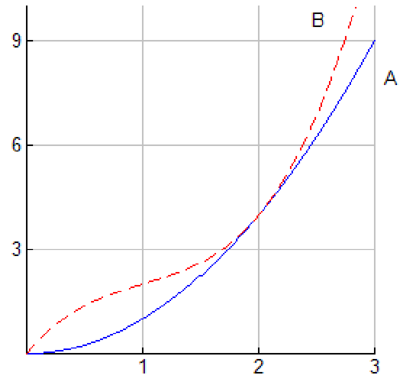
1.87 Van een rechthoek is de oppervlakte 12 cm^2. er zijn natuurlijk verschillende afmetingen mogelijk (2 bij 6 cm, 3 bij 4 cm). De omtrek van de rechthoek ligt dus niet vast.

a Stel één zijde van een rechthoek x en druk vervolgens de omtrek van de rechthoek uit in x.

b Bereken (exact) de minimale waarde die de omtrek kan hebben.

c Hoe kun je verklaren dat er geen maximale waarde is?

1.88 Twee sportauto's A en B rijden een rally over een zeer afwisselend parcours. Hiernaast is de race in beeld gebracht.
Op de horizontale as is de tijd (in minuten) uitgezet, op de verticale as de afstand tot een bevoorradingspost (in eenheden van 250 meter). Op het moment $t=0$ wordt A, die zojuist bijgetankt heeft, ingehaald door B. voor $0 \le t \le 3$ wordt de plaats van A op het tijdstip t gegeven door: $S_A(t)=t^2$ en van B door: $S_B(t)=t^3-3t^2+4t$.



a Druk de snelheden V_A en V_B van resp. A en B uit in t.
b Op welke tijdstippen, tussen 0 en 3, reden de beide auto's precies even snel?
c Geef een kort verslag van wat zich afspeelde rond het tijdstip $t=2$.
d Wat kun je zeggen van de versnelling van A gedurende het tijdsinterval [0,3]?
e Bereken het tijdstip in de periode [0,3] waarop de snelheid van B het laagst was. Hoe groot was de versnelling van B op dat tijdstip?


Doortocht door een klein Kenyaas dorp tijdens de Oostafrikaanse Safarirally.

1.89 Om een arm van een robot een gewenste beweging te laten maken, moet de snelheid van de aandrijfas van 0 omwentelingen per seconde (omw/sec) naar 10 omw/sec worden gebracht. Het tijdsverloop waarin dit moet gebeuren is 4 seconden. De snelheid (v) is dus een functie van de tijd (t). Om die beweging soepel te laten verlopen stellen we bepaalde eisen aan die functie. Niet alleen de snelheid moet zonder sprongen veranderen, maar ook de versnelling. Bij de start is de versnelling 0 omw/sec^2 en aan het eind moet dat weer zo zijn. Dit alles is te bereiken door een snelheidsfunctie te nemen van de vorm

$$v(t)=at^3+bt^2+ct+d$$

a Bereken de waarden van a, b, c en d en teken de grafiek van de gevonden functie. Die grafiek noemen we het snelheidsprofiel.
b Wanneer is de versnelling maximaal en hoe is dat aan het snelheidsprofiel te zien? Hoe groot zijn dan de snelheid en de versnelling?
c Iemand maakt een snelheidsprofiel door van (0,0) tot (2,6) een deel van een parabool met top (0,0) te nemen en van (2,6) tot (4,10) een deel van een parabool met top (4,10). Voldoet dat snelheidsprofiel aan alle eisen?

1.90 Een dobbelsteen van metaal heeft een massa van 0,1 kg en ribben met een lengte van 1 cm. We gaan de dobbelsteen gelijkmatig verhitten, waardoor de ribben uitzetten met een snelheid van $2 \cdot 10^{-9}$ m/s.

a Met welke snelheid verandert het volume van het blok/

b Met welke snelheid verandert de dichtheid (= massa/volume)?

c Neemt de dichtheid steeds sneller of steeds langzamer af?

1.91 Voor een lens met brandpuntsafstand *f* staat een kaars op afstand *v*. De beeldafstand kan dan gevonden worden uit de lenzenformule: $\frac{1}{b} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$

Een lens heeft brandpuntsafstand $f = 25$ cm.

a Bepaal $\frac{db}{dv}$

b De kaars beweegt zich van de lens af. Voor de kaarsafstand geldt bij deze beweging $v = \frac{t^2}{t+1}$.

Bepaal $\frac{db}{dt}$.

1.92 In een kweekschaal houden we het aantal bacteriën bij. Op enig tijdstip (t = 0) zijn er 5.000 bacteriën.

Het aantal bacteriën blijkt met de volgende formule te berekenen:

$B(t) = 5000 + 2t(1-t)^4$

a Wat is de gemiddelde toenamesnelheid op het tijdstip t=2?

b Wanneer is de gemiddelde toenamesnelheid minimaal?

1.93 De prijs van een zeker artikel is onderhevig aan flinke schommelingen. Een econoom, die de prijsbeweging heeft bestudeerd, beweert dat de prijs zich bij benadering gedraagt volgens de formule:

$P = 100 + 45\sin\frac{\pi t}{15}$ (t is de tijd in dagen)

a Tussen welke bedragen schommelt P? Hoeveel dagen duurt één periode van die prijsbeweging?

b Verklaar: $\frac{dP}{dt} = 3\pi\cos\frac{\pi t}{15}$

c Het verband tussen het aantal verkochte artikelen per dag en de prijs per stuk wordt volgens de genoemde econoom gegeven door de formule:
$N + P = 160$
Tussen welke aantallen schommelt N?

d Druk $\frac{dN}{dt}$ uit in t

e Laat R de omzet op het tijdstip t zijn: $R = N \cdot P$
Druk $\frac{dR}{dt}$ uit in t

f Toon aan: $\frac{dR}{dt} = 0$ geeft $\cos\frac{\pi t}{15} = 0$ of $\sin\frac{\pi t}{15} = -\frac{4}{9}$

g Schets het tekenverloop van $\frac{dR}{dt}$ voor $0 \le t \le 30$

h Bereken de maximale waarde die de omzet kan hebben.